

全国 2020 年 8 月高等教育自学考试

复变函数与积分变换试题

课程代码:02199

请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。
2. 每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共 12 小题,每小题 3 分,共 36 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的,请将其选出。

1. $\operatorname{Re}(iz) =$

- A. $i \operatorname{Re} z$ B. $\operatorname{Im} z$ C. $i \operatorname{Im} z$ D. $-\operatorname{Im} z$

2. $(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)(\cos 3\theta - i \sin 3\theta) =$

- A. $e^{-i\theta}$ B. $e^{i\theta}$ C. $e^{-5i\theta}$ D. $e^{5i\theta}$

3. 设 $z = x + iy$. 下列函数中,在 $z = 0$ 不可导的是

- A. $x^2 + y^2$ B. $x^2 + iy^2$ C. $x - iy$ D. $-y + ix$

4. 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是解析函数. 若 $u(x, y) = 2y$, 则 $f'(z) =$

- A. 0 B. 2 C. $-2i$ D. $2i$

5. 设 C 为正向圆周 $|z| = 1$. 下列积分为零的是

- A. $\oint_C \frac{dz}{\sin z}$ B. $\oint_C \frac{dz}{\cos z}$ C. $\oint_C \frac{dz}{z}$ D. $\oint_C \frac{dz}{3z+1}$

6. 设 C 为正向圆周 $|z| = 4$, $f(z)$ 是解析函数, 则 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-2)(z-3)} dz =$

- A. $f(3) - f(2)$ B. $f(3) + f(2)$ C. $f(2) - f(3)$ D. 0

7. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, $f(z)$ 是解析函数, $g(z) = \oint_C \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, 则 $g'(0) =$
- A. $-2\pi i f(0)$ B. $2\pi i f(0)$ C. $-2\pi i f'(0)$ D. $2\pi i f'(0)$
8. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z=i$ 收敛, 则该级数在 $z=\frac{1}{2}$
- A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 无法判断
9. 洛朗级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n z^n}$ 的收敛圆环域是
- A. $0 < |z| < 3$ B. $|z| > \frac{1}{3}$ C. $0 < |z| < \frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3} < |z| < 3$
10. $z=0$ 是 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ 的
- A. 可去奇点 B. 本性奇点 C. 一阶极点 D. 二阶极点
11. $f(t) = e^{-3|t|}$ 的傅氏变换 $F[f(t)] =$
- A. $\frac{6}{9 + \omega^2}$ B. $\frac{2\omega}{9 + \omega^2}$ C. $\frac{6}{9 - \omega^2}$ D. $\frac{2\omega}{9 - \omega^2}$
12. $f(t) = te^{-3t}$ 的拉氏变换 $L[f(t)] =$
- A. $-\frac{1}{p+3}$ B. $\frac{1}{p+3}$ C. $-\frac{1}{(p+3)^2}$ D. $\frac{1}{(p+3)^2}$

非选择题部分

注意事项:

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上,不能答在试题卷上。

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。

13. $(\sqrt{3} + i)^6 =$ _____.
14. 设 $f(z) = \bar{z} \sin z$, 则 $f'(0) =$ _____.
15. $(-1)^i$ 的主值为 _____.
16. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则 $\oint_C \bar{z} e^z dz =$ _____.
17. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 发散, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 _____.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18. 解方程 $\cos z = 3$.

19. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, $f(z)$ 为解析函数, 求 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z(z-1)^2} dz$.

20. 证明 $u(x, y) = xy$ 是调和函数. 求以 u 为实部的解析函数 $f(z)$.

21. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$ 的收敛圆域及其和函数.

22. 将 $f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 在圆环域 $1 < |z| < +\infty$ 内展开为洛朗级数.

23. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{z^5}{z^6+1} dz$.

四、综合题：本大题共 3 小题，共 19 分。

24. (本题 6 分)

(1) 求 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$ 的所有奇点, 并说明奇点类型;

(2) 求 $f(z)$ 在上半平面奇点的留数;

(3) 利用上面结果求实积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4x+5} dx$.

25. (本题 6 分)

设 $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 利用拉氏变换的延迟性质或定义求 $L[f(t)]$.

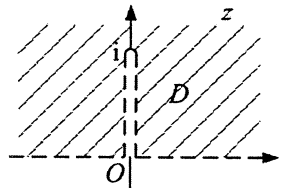
26. (本题 7 分)

设 D 是挖掉连接 $z=0$ 和 $z=i$ 的线段的上半 z 平面

(如图).

(1) $w_1 = f_1(z) = z^2$ 将 D 映射为 w_1 平面上区域 D_1 ,

问 D_1 是什么区域?



题 26 图

(2) $w_2 = f_2(w_1) = w_1 + 1$ 将 D_1 映射为 w_2 平面上区域 D_2 , 问 D_2 是什么区域?

(3) $w = f_3(w_2) = \sqrt{w_2}$ 将 D_2 映射为 w 平面上区域 G , 问 G 是什么区域?

(4) 写出一个将 z 平面上区域 D 映射为 w 平面上区域 G 的保形映射.